Chuyên đề 2: LƯỢNG GIÁC

✓ Vấn đề 1: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Phương trình lượng giác cơ bản

$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + k2\pi$

$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right.$

$\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$

$\cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$ (với $k \in \mathbb{Z}$)

2. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

$a\sin^2x + b\sin x + c = 0$. Đặt $t = \sin x$, $|t| \le 1$

$a\cos^2x + b\cos x + c = 0$. Đặt $t = \cos x$, $|t| \le 1$

$a\tan^2x + b\tan x + c = 0$. Đặt $t = \tan x$

$a\cot^2x + b\cot x + c = 0$. Đặt $t = \cot x$

3. Phương trình bậc nhất đối với sinx, cosx

$$a\sin x + b\cos x = c \ (*)$$

Điều kiện có nghiệm: $a^2 + b^2 \ge c^2$

- *Cách 1:* Chia hai vế cho $\sqrt{a^2+b^2} \ne 0$

$(*) \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Do $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$

Nên có thể đặt $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha$

Khi đó:

$(*) \Leftrightarrow \sin x\cos\alpha + \sin\alpha\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

- *Cách 2:* Chia hai vế cho a (giả sử $a \ne 0$)

$(*) \Leftrightarrow \sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a}$

Đặt $\frac{b}{a} = \tan\alpha$. Khi đó: $(*) \Leftrightarrow \sin x + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos x = \frac{c}{a}$

$$\Leftrightarrow \sin x\cos\alpha + \sin\alpha\cos x = \frac{c}{a}\cos\alpha \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \frac{c}{a}\cos\alpha$$

- *Cách 3:* Đặt ẩn số phụ.
  - Xét $x = (2k+1)\pi$ với ($k \in \mathbb{Z}$) có là nghiệm 0
  - Xét $x \neq (2k+1)\pi$ với ($k \in \mathbb{Z}$)

  Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$

  Khi đó: $(*) \Leftrightarrow a\frac{2t}{1+t^2} + b\frac{1-t^2}{1+t^2} = c \Leftrightarrow (b+c)t^2 - 2at + c - b = 0$

4. Phương trình đối xứng: $a(\sin x + \cos x) + b\sin x\cos x + c = 0$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$

Khi đó: $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$

Thay vào phương trình ta được phương trình đại số theo t.

- *Chú ý:* $a(\sin x - \cos x) + b\sin x\cos x + c = 0$

  Đặt $t = \sin x - \cos x$ (với $|t| \leq \sqrt{2}$)

5. Phương trình đẳng cấp bậc 2 đối với sinx, cosx

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$$

- Xét $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) có là nghiệm không?
- Xét $\cos x \neq 0$. Chia 2 vế cho $\cos^2 x$ ta thu được phương trình bậc 2 theo tanx.

- *Chú ý:* Nếu là phương trình đẳng cấp bậc k đối với sinx, cosx thì ta xét cosx = 0 và xét $\cos x \neq 0$ chia 2 vế của phương trình cho $\cos^k x$ và ta thu được một phương trình bậc k theo tanx.

B. ĐỀ THI

Bài 1: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2011

Giải phương trình: $\frac{1+\sin 2x + \cos 2x}{1+\cot^2 x} = \sqrt{2}\sin x.\sin 2x$.

Giải

Điều kiện: $\sin x \neq 0$. Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \sqrt{2}\sin x.\left(2\sin x\cos x\right)$$

$\Leftrightarrow \sin^2 x\left(1+\sin 2x+\cos 2x\right)=2\sqrt{2}\sin^2 x.\cos x$

$\Leftrightarrow 1+\sin 2x+\cos 2x=2\sqrt{2}\cos x$ (vì sinx $\neq 0$)

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+2\sin x\cos x-2\sqrt{2}\cos x=0$

$\Leftrightarrow \cos x=0 \vee \cos x+\sin x=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \cos x=0 \vee \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \vee x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi$ $(k\in Z)$ (Thỏa điều kiện sinx $\neq 0$).

Vậy nghiệm của (1) là $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \vee x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi$ $(k\in Z)$.

Bài 2: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2011

Giải phương trình: $\sin 2x\cos x+\sin x\cos x=\cos 2x+\sin x+\cos x$

Giải

$\sin 2x\cos x+\sin x\cos x=\cos 2x+\sin x+\cos x$

$\Leftrightarrow$ 2sinx.cos^{2}x + sinx.cosx = 2cos^{2}x – 1 + sinx + cosx

$\Leftrightarrow$ sinx.cosx(2cosx + 1) = cosx(2cosx + 1) + sinx – 1

$\Leftrightarrow$ cosx (2cosx + 1)(sinx – 1) = sinx – 1

$\Leftrightarrow$ sinx – 1 = 0 hoặc cosx (2cosx + 1) = 1

$\Leftrightarrow$ sinx = 1 hoặc 2cos^{2}x + cosx – 1 = 0

$\Leftrightarrow$ sinx = 1 hoặc cosx = –1 hoặc cosx = $\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$ hoặc $x=\pi+k2\pi$ hoặc $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$ hoặc $x=\dfrac{\pi}{3}+k\dfrac{2\pi}{3}$ $(k\in Z)$

Bài 3: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2011

Giải phương trình: $\dfrac{\sin 2x+2\cos x-\sin x-1}{\tan x+\sqrt{3}}=0$

Giải

$\dfrac{\sin 2x+2\cos x-\sin x-1}{\tan x+\sqrt{3}}=0$. Điều kiện: tanx $\neq -\sqrt{3}$ và cosx $\neq 0$.

$\Leftrightarrow \sin 2x+2\cos x-\sin x-1=0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos x+2\cos x-\left(\sin x+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow 2\cos x(\sin x+1)-(\sin x+1)=0 \Leftrightarrow (\sin x+1)(2\cos x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1 \text{ (Loại vì khi đó cosx = 0)}\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi \ (k\in Z).$$

So với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi$ $(k\in Z)$.

Bài 4: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2011

Giải phương trình: $\cos 4x + 12\sin^2 x - 1 = 0$.

Giải

$\cos 4x + 12\sin^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 1 + 6(1 - \cos 2x) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2 2x - 3\cos 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 1$ hay $\cos 2x = 2$ (loại)

$\Leftrightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi$ $(k \in Z)$.

Bài 5: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2010

Giải phương trình: $\dfrac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x$

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0$ và $\tan x \neq -1$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$\frac{(1+\sin x+\cos 2x).(\sin x+\cos x)}{1+\tan x}=\cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+\sin x+\cos 2x).(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}\cos x=\cos x$$

$$\Leftrightarrow 1+\sin x+\cos 2x=1 \Leftrightarrow \sin x+\cos 2x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x-1=0 \Leftrightarrow \sin x=1 \text{(loại)} \text{ hay } \sin x=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \text{ hay } x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi \ (k\in Z)$$

Bài 6: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2010

Giải phương trình $(\sin 2x + \cos 2x)\cos x + 2\cos 2x - \sin x = 0$

Giải

Phương trình đã cho tương đương:

$(2\sin x\cos x + \cos 2x)\cos x + 2\cos 2x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\cos x + 2) + \sin x(2\cos^2 x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\cos x + 2) + \sin x.\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x\,(\cos x + \sin x + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \cos x + \sin x + 2 = 0 \ \ (\text{vn})\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\ \ (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 7: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2010

Giải phương trình $\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 1 = 0$

Giải

Phương trình đã cho tương đương:

$2\sin x\cos x - 1 + 2\sin^2 x + 3\sin x - \cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) + 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) + (2\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\cos x + \sin x + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = \dfrac{1}{2}\\ \cos x + \sin x = -2\ \ (\text{VN})\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài 8: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2010

Giải phương trình $4\cos\dfrac{5x}{2}\cos\dfrac{3x}{2} + 2(8\sin x - 1)\cos x = 5$.

Giải

Phương trình đã cho tương đương:

$2(\cos 4x + \cos x) + 16\sin x\cos x - 2\cos x = 5$

$\Leftrightarrow\ 2\cos 4x + 8\sin 2x = 5\ \Leftrightarrow\ 2 - 4\sin^2 2x + 8\sin 2x = 5$

$\Leftrightarrow 4\sin^2 2x - 8\sin 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \dfrac{3}{2}$ (loại) hay $\sin 2x = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\ 2x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ hay $2x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$

$\Leftrightarrow\ x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi$ hay $x = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi\ \ (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 9: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2009

Giải phương trình: $\dfrac{(1 - 2\sin x)\cos x}{(1 + 2\sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$.

Giải

Điều kiện: sinx ≠ 1 và sinx ≠ $-\frac{1}{2}$ (*)

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$(1 - 2\sin x)\cos x = \sqrt{3}(1+2\sin x)(1-\sin x)$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3}\sin x = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ hoặc } x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp (*), ta được nghiệm: $x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}(k \in \mathbb{Z})$

Bài 10: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2009

Giải phương trình: sinx + cosxsin2x + $\sqrt{3}\cos 3x = 2\left(\cos 4x + \sin^3 x\right)$

Giải

Phương trình đã cho tương đương:

$$(1 - 2\sin^2 x)\sin x + \cos x\sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \sin x\cos 2x + \cos x\sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow 4x = 3x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ hoặc } 4x = -3x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy: $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$; $x = \frac{\pi}{42} + k\frac{2\pi}{7} \ (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 11: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2009

Giải phương trình: $\sqrt{3}\cos 5x - 2\sin 3x\cos 2x - \sin x = 0$

Giải

Phương trình đã cho tương đương:

$$\sqrt{3}\cos 5x - (\sin 5x + \sin x) - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x - \frac{1}{2}\sin 5x = \sin x \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} - 5x = x + k2\pi \text{ hay } \frac{\pi}{3} - 5x = \pi - x + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy: $x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}$ hay $x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$

Bài 12: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2009

Giải phương trình $(1 + 2\sin x)^2\cos x = 1 + \sin x + \cos x$

Giải

Phương trình đã cho tương đương:

$(1 + 4\sin x + 4\sin^2 x)\cos x = 1 + \sin x + \cos x$

$\Leftrightarrow \cos x + 4\sin x\cos x + 4\sin^2 x\cos x = 1 + \sin x + \cos x$

$\Leftrightarrow 1 + \sin x = 0$ hay $4\sin x\cos x = 1$

$\Leftrightarrow \sin x = -1$ hay $\sin 2x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ hay $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ hay $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ (với $k \in \mathbb{Z}$).

Bài 13: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2008

Giải phương trình: $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4\sin\left(\frac{7\pi}{4} - x\right)$

Giải

Ta có: $\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos x$

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = -4\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x) = -2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)\sin x\cos x$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)\left(1 + \sqrt{2}\sin 2x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x + \sin x = 0 \\ \sin 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{8} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài 14: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2008

Giải phương trình: $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x\cos x$

Giải

$$\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x.\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x.\cos x \qquad (1)$$

Cách 1: Phương trình đã cho tương đương:

$$\sin x(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sqrt{3}\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \tan x = -\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Nghiệm của phương trình là: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$ và $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Cách 2:
- cosx = 0 không phải là nghiệm của phương trình (1).
- Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^3 x$ ta được:

$$\tan^3 x - \sqrt{3} = \tan x - \sqrt{3}\tan^3 x$$

$$\Leftrightarrow (\tan x + \sqrt{3})(\tan^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = -\sqrt{3}\\ \tan x = \pm 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi\\ x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 15: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2008

Giải phương trình: 2sinx(1 + cos2x) + sin2x = 1 + 2cosx.

Giải

Phương trình đã cho tương đương:

$4\sin x.\cos^2 x + \sin 2x - 1 - 2\cos x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x\cos x - 1) + (\sin 2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin 2x - 1)(2\cos x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 1 \text{ hay } \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ hay } x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \text{ hay } x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 16: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2008

Giải phương trình: $\sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = 2\sin 2x$.

Giải

Phương trình đã cho tương đương:

$$\frac{1}{2}\sin 3x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\sin 3x - \sin\frac{\pi}{3}\cos 3x = \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - \frac{\pi}{3} = 2x + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{3} = \pi - 2x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 17: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2007

Giải phương trình: $(1 + \sin^2 x)\cos x + (1 + \cos^2 x)\sin x = 1 + \sin 2x$

Giải

Phương trình đã cho tương đương:

$(\sin x + \cos x)(1 + \sin x\cos x) = (\sin x + \cos x)^2$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x)(1 - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ x = k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 18: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2007

Giải phương trình: $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$.

Giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$\sin 7x - \sin x + 2\sin^2 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 4x(2\sin 3x - 1) = 0$

- $\cos 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}\ (k \in \mathbb{Z})$
- $\sin 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$ hoặc $x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 19: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2007

Giải phương trình: $\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cos x = 2$

Giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$1 + \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Bài 20: ĐẠI HỌC SÀI GÒN KHỐI A NĂM 2007

Giải phương trình: $3\tan^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\frac{1 - \sin x}{\sin x}\right)$

Giải

Điều kiện: $\sin x \neq 0$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$3\cot^2 x = \frac{2}{\sin x} - 2 \Leftrightarrow \frac{3}{\sin^2 x} - \frac{2}{\sin x} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{\sin x} = 1 \\ \dfrac{1}{\sin x} = -\dfrac{1}{3} \text{(vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \ (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 21: ĐẠI HỌC SÀI GÒN KHỐI B NĂM 2007

Giải phương trình: 1 + sinx + cosx + tanx = 0

Giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$$1 + \sin x + \cos x + \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \text{ (điều kiện: } \cos x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ \cos x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 22: CAO ĐẲNG XÂY DỰNG SỐ 2 NĂM 2007

Giải phương trình: $\cos^4x - \sin^4x + \cos4x = 0$.

Giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\cos^2x - \sin^2x + 2\cos^2 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x + \cos2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = -1 \\ \cos 2x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 23: CAO ĐẲNG KỸ THUẬT CAO THẮNG NĂM 2007

Giải phương trình: $2\sin^3x + 4\cos^3x = 3\sin x$.

Giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$$2\sin^3x + 4\cos^3x - 3\sin x(\sin^2x + \cos^2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^3x + 3\sin x\cos^2x - 4\cos^3x = 0 \ \ (1)$$

Dễ thấy $\cos x = 0$ không phải là nghiệm của (1)

Do đó $\cos x \neq 0$, ta chia hai vế của (1) cho $\cos^3x$, ta được:

(1) $\Leftrightarrow \tan^3x + 3\tan x - 4 = 0 \Leftrightarrow (\tan x - 1)(\tan^2x + \tan x + 4) = 0$

$\Leftrightarrow \tan x = 1$ (do $\tan^2x + \tan x + 4 > 0$ với $\forall x$)

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 24: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2006

Giải phương trình: $\dfrac{2\left(\cos^6 x+\sin^6 x\right)-\sin x\cos x}{\sqrt{2}-2\sin x}=0$

Giải

Điều kiện: $\sin x \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (1).

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$\Leftrightarrow 2(\cos^6 x+\sin^6 x)-\sin x\cos x=0$

$\Leftrightarrow 2\left(1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2x\right)-\dfrac{1}{2}\sin 2x=0$

$\Leftrightarrow 3\sin^2 2x+\sin 2x-4=0 \Leftrightarrow \sin 2x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}).$

Do điều kiện (1) nên: $x=\dfrac{5\pi}{4}+2m\pi. \quad (m\in\mathbb{Z}).$

Bài 25: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2006

Giải phương trình: $\cot x+\sin x\left(1+\tan x\tan\dfrac{x}{2}\right)=4$

Giải

Điều kiện: $\sin x\neq 0$, $\cos x\neq 0$, (1)

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$\frac{\cos x}{\sin x}+\sin x\frac{\cos x\cos\frac{x}{2}+\sin x\sin\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}}=4$$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos x}{\sin x}+\dfrac{\sin x}{\cos x}=4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sin x\cos x}=4 \Leftrightarrow \sin 2x=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi$ hay $x=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$, thỏa mãn (1)

Bài 26: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2006

Giải phương trình: $\cos 3x+\cos 2x-\cos x-1=0$.

Giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$-2\sin 2x.\sin x-2\sin^2 x=0$

$\Leftrightarrow \sin x$ hay $\sin 2x+\sin x=0$

$\Leftrightarrow \sin x=0$ hay $2\cos x+1=0$

$\Leftrightarrow x = k\pi$ hay $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

Bài 27: ĐỀ DỰ BỊ 1 - ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2006

Giải phương trình: $\cos 3x.\text{cox}^3x - \sin 3x.\sin^3x = \frac{2+3\sqrt{2}}{8}$

Giải

Ta có công thức: $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3x \Rightarrow \sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$

và $\cos 3x = 4\cos^3x - 3\cos x \Rightarrow \cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}$

Từ đó phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\cos 3x\left(\frac{3\cos x + \cos 3x}{4}\right) - \sin 3x\left(\frac{3\sin x - \sin 3x}{4}\right) = \frac{2+3\sqrt{2}}{8}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 3x + \sin^2 3x + 3(\cos 3x\cos x - \sin 3x\sin x) = \frac{2+3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 3\cos 4x = \frac{2+3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 28: ĐỀ DỰ BỊ 1 - ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2006

Giải phương trình: $(2\sin^2x - 1)\tan^2 2x + 3(2\cos^2x - 1) = 0$

Giải

Điều kiện $\cos 2x \neq 0$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$-\cos 2x\tan^2 2x + 3\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(\tan^2 2x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \,(\text{loại}) \\ \tan^2 2x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \tan 2x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 29: ĐỀ DỰ BỊ 1 - ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2006

Giải phương trình: $\cos^3x + \sin^3x + 2\sin^2x = 1$

Giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$$(\sin x + \cos x)(1 - \cos x\sin x) - \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x.\cos x - (\cos x - \sin x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \cos x)(1 + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, \ (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 30: ĐỀ DỰ BỊ 1

Tìm nghiệm trên khoảng (0; π) của phương trình:

$$4\sin^2\frac{x}{2}-\sqrt{3}\cos 2x = 1+2\cos^2\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$$

Giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$\Leftrightarrow\ 2(1-\cos x)-\sqrt{3}\cos 2x = 1+1+\cos\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow$ 2 – 2cosx – $\sqrt{3}$ cos2x = 2 – sin2x

$\Leftrightarrow$ $\sqrt{3}$ cos2x – sin2x = –2cosx

$\Leftrightarrow\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x = -\cos x \Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos(\pi - x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \ (k\in\mathbb{Z})$$

Do x ∈ (0; π) nên ta có nghiệm: $x_1=\frac{5\pi}{18}, x_2=\frac{17\pi}{18}, x_3=\frac{5\pi}{6}$.

Bài 31: ĐỀ DỰ BỊ 1

Giải phương trình: $\sin x\cos 2x+\cos^2 x\left(\tan^2 x-1\right)+2\sin^3 x = 0$.

Giải

Điều kiện: cosx ≠ 0 ⇔ sinx ≠ ± 1

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$\sin x.\cos 2x+\cos^2 x\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-1\right)+2\sin^3 x = 0$$

$\Leftrightarrow \sin x\left(\cos 2x+2\sin^2 x\right)-\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(\cos 2x+1-\cos 2x)-\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+\sin x-1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \ (\text{loại}) \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. k\in\mathbb{Z}$$

Bài 32: ĐỀ DỰ BỊ 2

Giải phương trình: $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-3\tan^2 x = \frac{\cos 2x-1}{\cos^2 x}$

Giải

Điều kiện: cosx ≠ 0 và sinx ≠ 0

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$-\cot x - 3\tan^2 x = \frac{-2\sin^2 x}{\cos^2 x} \Leftrightarrow -\frac{1}{\tan x} - \tan^2 x = 0 \Leftrightarrow \tan^3 x = -1$$

$$\Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$ thỏa điều kiện.

Bài 33:

Giải phương trình: $5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\tan^2 x$

Giải

Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \pm 1$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$5\sin x - 2 = 3(1-\sin x).\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 3(1-\sin x)\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$$

$\Leftrightarrow (5\sin x - 2)(1 + \sin x) = 3\sin^2 x$

$\Leftrightarrow 5\sin x + 5\sin^2 x - 2 - 2\sin x = 3\sin^2 x$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} \quad (\text{thỏa mãn đk}) \\ \sin x = -2 \quad (\text{loại}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 34:

Giải phương trình $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$.

Giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = 2\sin x\cos x - \sin x$

$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin x(2\cos x - 1)$

$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ \tan x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 35: ĐỀ DỰ BỊ 1

Giải phương trình: $4(\sin^3 x + \cos^3 x) = \cos x + 3\sin x$.

Giải

cosx = 0 không phải là nghiệm của phương trình nên ta chia 2 vế cho $\cos^3 x$

Phương trình đã cho tương đương với:

$$4\tan^3 x + 4 = 1 + \tan^2 x + 3\tan x(1 + \tan^2 x)$$

$$\Leftrightarrow \tan^3 x - \tan^2 x - 3\tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow (\tan x - 1)(\tan^2 x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x = 1 \text{ hay } \tan^2 x = 3 \Leftrightarrow \tan x = 1 \text{ hay } \tan x = \pm\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ hay } x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 36: ĐỀ DỰ BỊ 1

Giải phương trình: $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = 2\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Giải

Điều kiện $\cos x \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$\sin x - \cos x = 2\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos x \sin x$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{ hay } \sin 2x = -1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 37:

Giải phương trình $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x$.

Giải

Điều kiện $\begin{cases} \tan x \neq -1 \\ \sin x, \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x \neq k\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$\frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = \frac{\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\cos x}{\cos x + \sin x} + \sin^2 x - \cos x \sin x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = (\cos x - \sin x)\cos x + \sin x(\sin x - \cos x)$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \text{ hay } 1 = \sin x\cos x - \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \tan x = 1 \text{ hay } 1 + \tan^2 x = \tan x - \tan^2 x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ 2\tan^2 x - \tan x + 1 = 0 \ (\text{vô nghiệm}) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \ (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 38:

Giải phương trình: $\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \dfrac{2}{\sin 2x}$

Giải

Điều kiện $\sin 2x \neq 0$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x} \Leftrightarrow 2\cos 2x + 4\sin^2 2x = 2$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 1 \ (\text{loại}) \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 39:

Giải phương trình $\sin^2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)\tan^2 x - \cos^2\dfrac{x}{2} = 0.$

Giải

Điều kiện: $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$\frac{1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{2}\tan^2 x - \frac{1 + \cos x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x)\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1 - \cos x = 0 \Leftrightarrow \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{1 + \sin x} = 1 + \cos x$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos x = 0 \text{ hay } 1 - \cos x = 1 + \sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -1 \text{ hay } \tan x = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \ (\text{nhận}) \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ (\text{nhận}) \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 40: ĐỀ DỰ BỊ 1

Giải phương trình: $3 - \tan x(\tan x + 2\sin x) + 6\cos x = 0$.

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$3 - \frac{\sin x}{\cos x}\left(\frac{\sin x}{\cos x} + 2\sin x\right) + 6\cos x = 0$$

$\Leftrightarrow 3\cos^2 x - \sin x(\sin x + 2\sin x.\cos x) + 6\cos^3 x = 0$

$\Leftrightarrow 3\cos^2 x(1 + 2\cos x) - \sin^2 x(1 + 2\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow 1 + 2\cos x = 0$ hay $3\cos^2 x - \sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$ hay $\tan^2 x = 3 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ hay $\tan x = \pm\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Bài 41: ĐỀ DỰ BỊ 1

Giải phương trình: $3\cos 4x - 8\cos^6 x + 2\cos^2 x + 3 = 0$

Giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$3(1 + \cos 4x) - 2\cos^2 x(4\cos^4 x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 6\cos^2 2x - 2\cos^2 x(2\cos^2 x - 1)(2\cos^2 x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 6\cos^2 2x - 2\cos^2 x(\cos 2x)(2\cos^2 x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x = 0$ hay $3\cos 2x - \cos^2 x(2\cos^2 x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ 2\cos^4 x - 5\cos^2 x + 3 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos^2 x = 1 \\ \cos^2 x = \frac{3}{2}\ (\text{loại}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Bài 42: ĐỀ DỰ BỊ 2

Giải phương trình: $\dfrac{\left(2 - \sqrt{3}\right)\cos x - 2\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{2\cos x - 1} = 1$.

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq \frac{1}{2}$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$(2-\sqrt{3})\cos x - \left[1-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2\cos x - 1 \Leftrightarrow -\sqrt{3}\cos x + \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp lại điều kiện $\cos x \neq \frac{1}{2}$. Ta chọn $x = \frac{4\pi}{3} + m2\pi, m \in \mathbb{Z}$

Bài 43: ĐỀ DỰ BỊ 1

Giải phương trình: $\cot x = \tan x + \frac{2\cos 4x}{\sin 2x}$

Giải

Điều kiện $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq \pm 1$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{2\cos 4x}{2\sin x.\cos x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \sin^2 x + \cos 4x.$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x - (2\cos^2 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 1(\text{loại}) \text{ hay } \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 44:

Giải phương trình $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$.

Giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{1-\cos 6x}{2} - \frac{1+\cos 8x}{2} = \frac{1-\cos 10x}{2} - \frac{1+\cos 12x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 8x + \cos 6x = \cos 12x + \cos 10x$$

$$\Leftrightarrow \cos 7x\cos x = \cos 11x\cos x \Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ hay } \cos 11x = \cos 7x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\frac{\pi}{2} \\ x = k\frac{\pi}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\frac{\pi}{2} \\ x = k\frac{\pi}{9} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 45: ĐỀ DỰ BỊ 2

Giải phương trình: $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{5\sin 2x} = \frac{1}{2}\cot 2x - \frac{1}{8\sin 2x}$.

Giải

Điều kiện $\sin 2x \neq 0$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$\frac{1-2\sin^2 x.\cos^2 x}{5\sin 2x}=\frac{1}{2}\frac{\cos 2x}{\sin 2x}-\frac{1}{8\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 2x-5\cos 2x+\frac{9}{4}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=\frac{9}{2}(\text{loại})\\ \cos 2x=\frac{1}{2}(\text{nhận})\end{array}\right.$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi \ \ (k\in\mathbb{Z})$$

Bài 46: ĐỀ DỰ BỊ 1

Giải phương trình $\tan^4 x+1=\dfrac{\left(2-\sin^2 2x\right)\sin 3x}{\cos^4 x}$.

Giải

Điều kiện $\cos x \neq 0$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$\sin^4 x + \cos^4 x = (2 - \sin^2 2x).\sin 3x$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x.\cos^2 x = (2 - \sin^2 2x).\sin 3x$

$\Leftrightarrow (2 - \sin^2 2x) = 2(2 - \sin^2 2x).\sin 3x$

$\Leftrightarrow 2 - \sin^2 2x = 0$ (loại) hay $1 = 2\sin 3x$

$$\Leftrightarrow \sin 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}\\ x=\frac{5\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}\end{array}\right. \ (k\in\mathbb{Z})$$

Bài 47: CAO ĐẲNG KINH TẾ - KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP I

Giải phương trình: $\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{3-\sin x}{2}$

Giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{3-\sin x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)}{2}+\frac{1-\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right)}{2}=\frac{3-\sin x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1-\sin x+\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 1-\sin x+2\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2x=0$$

$$\Leftrightarrow 1-\cos 2x-\sin x=0\Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 48: CAO ĐẲNG KINH TẾ - KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP TP. HCM

Giải phương trình: cos3x.tan5x = sin7x

Giải

Điều kiện: $\cos 5x \neq 0$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$\sin 5x.\cos 3x = \sin 7x.\cos 5x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 8x) = \frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 12x)$$

$$\Leftrightarrow \sin 12x = \sin 8x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{k\pi}{2}\\ x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{k\pi}{10}\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 49: CAO ĐẲNG CÔNG NGHIỆP THỰC PHẨM

Giải phương trình: $\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{\sin x} = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0$; $\sin x \neq 0$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$2(\sin x + \cos x) = \sin 2x(\cos x + \sin x)$

$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0$ hay $2 = \sin 2x$ (vô nghiệm)

$$\Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 50: CĐSP TW TP. HCM

Giải phương trình: sin2x + cos2x + 3sinx – cosx – 2 = 0

Giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$2\sin x\cos x + 1 - 2\sin^2 x + 3\sin x - \cos x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) - (2\sin^2 x - 3\sin x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) - (\sin x - 1)(2\sin x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x - 1 = 0$ hay $\cos x - \sin x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \text{ hay } \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \text{ hay } \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 51: CAO ĐẲNG KINH TẾ ĐỐI NGOẠI

Giải phương trình: $\sin^6 x + \cos^6 x = 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$$1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = (\sin x + \cos x)^2 \Leftrightarrow 3\sin^2 2x + 4\sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 0 \text{ hay } \sin 2x = -\frac{4}{3} \text{ (loại)} \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 52: CAO ĐẲNG KINH TẾ TP. HCM

Giải phương trình: $\sin 2x\sin x + \cos 5x\cos 2x = \frac{1 + \cos 8x}{2}$

Giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{1}{2}[\cos x - \cos 3x] + \frac{1}{2}[\cos 7x + \cos 3x] = \frac{1 + \cos 8x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x + \cos 7x = 1 + \cos 8x \Leftrightarrow 2\cos 4x\cos 3x = 2\cos^2 4x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 4x = 0 \\ \cos 4x = \cos 3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \\ x = \frac{k2\pi}{7} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 53: CAO ĐẲNG TÀI CHÍNH – HẢI QUAN

Giải phương trình: $\cos x.\cos 2x.\sin 3x = \frac{1}{4}\sin 2x$

Giải

Phương trình đã cho tương đương với: $2\cos x\cos 2x\sin 3x = \sin x\cos x$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ hay } 2\cos 2x\sin 3x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ hay } \sin 5x + \sin x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ hay } x = \frac{k\pi}{5} \ (k \in \mathbb{Z})$$

✓ ***Vấn đề 2:***

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC TRÊN MỘT MIỀN

ĐỀ THI

Bài 1:

Tìm nghiệm thuộc khoảng (0; 2π) của phương trình:

$$5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3.$$

Giải

Điều kiện $1 + 2\sin 2x \neq 0$ (1)

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với:

$5(\sin x + 2\sin 2x\sin x + \cos 3x + \sin 3x) = (\cos 2x + 3)(1 + 2\sin 2x)$

$\Leftrightarrow 5(\sin x + \cos x - \cos 3x + \cos 3x + \sin 3x) = (\cos 2x + 3)(1 + 2\sin 2x)$

$\Leftrightarrow 5(2\sin 2x\cos x + \cos x) = (\cos 2x + 3)(1 + 2\sin 2x)$

$\Leftrightarrow 5\cos x(1 + 2\sin 2x) = (\cos 2x + 3)(1 + 2\sin 2x)$

$\Leftrightarrow 5\cos x = \cos 2x + 3$ (Vì $1 + 2\sin 2x \neq 0$)

$\Leftrightarrow 5\cos x = 2\cos^2 x + 2 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ (thỏa điều kiện (1))

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Vì nghiệm x thuộc khoảng (0; 2π) nên $x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3}$

Bài 2:

Tìm x thuộc đoạn [0; 14] nghiệm đúng phương trình:

$$\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0.$$

Giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$4\cos^3 x - 3\cos x - 4(2\cos^2 x - 1) + 3\cos x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 4(\cos^3 x - 2\cos^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x = 2$ (loại) $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Vì $x \in [0; 14]$ nên $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{2}$, $x = \frac{7\pi}{2}$.

✓ *Vấn đề 3:*

ĐIỀU KIỆN CÓ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Phương trình Asinx + Bcosx = C có nghiệm $\Leftrightarrow A^2 + B^2 \geq C^2$.
- Sử dụng các phương pháp thường gặp như trong đại số.

B. ĐỀ THI

Bài 1: ĐỀ DỰ BỊ 1

Xác định m để phương trình $2(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 4x + 2\sin 2x - m = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$$2(1 - 2\sin^2 x.\cos^2 x) + 1 - 2\sin^2 2x + 2\sin 2x - m = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) + 1 - 2\sin^2 2x + 2\sin 2x = m$$

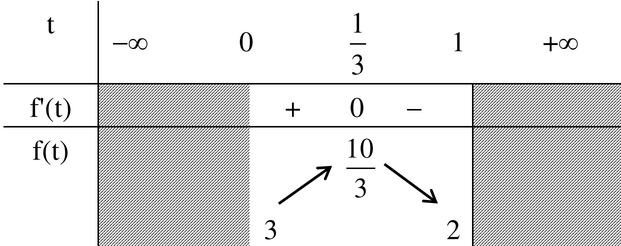
$$\Leftrightarrow -3\sin^2 2x + 2\sin 2x + 3 = m \qquad (1)$$

Đặt $t = \sin 2x$. Vì $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 0 \le 2x \le \pi \Rightarrow 0 \le \sin 2x \le 1 \Rightarrow 0 \le t \le 1$

(1) thành $\Leftrightarrow -3t^2 + 2t + 3 = m \qquad (2); 0 \le t \le 1$

Đặt $f(t) = -3t^2 + 2t + 3$

- $f'(t) = -6t + 2$ • $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$
- Bảng biến thiên



t	$-\infty$	0		$\frac{1}{3}$		1	$+\infty$
f'(t)			+	0	−		
f(t)		3	↗	$\frac{10}{3}$	↘	2	

- Nhận xét: (2) là phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng Δ: y = m và đường cong (C). Từ đó (1) có nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\Leftrightarrow \Delta \text{ và (C) có điểm chung trên } [0;1] \Leftrightarrow 2 \le m \le \frac{10}{3}.$$

Bài 2: ĐỀ DỰ BỊ 1

Cho phương trình $\frac{2\sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2\cos x + 3} = a \qquad (1) \qquad$ (a là tham số)

a/ Giải phương trình (1) khi $a = \frac{1}{3}$.

b/ Tìm a để phương trình (1) có nghiệm.

Giải

Tập xác định của phương trình (1): D = $\mathbb{R}$. Do đó:

(1) $\Leftrightarrow$ 2sinx + cosx + 1 = a(sinx – 2cosx + 3)

$\Leftrightarrow$ (2 – a)sinx + (2a + 1).cosx = 3a – 1

a/ Khi a = $\frac{1}{3}$: (1) $\Leftrightarrow \frac{5}{3}\sin x + \frac{5}{3}\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = -\cos x \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{R})$

b/ Do $(2 - a)^2 + (2a + 1) \neq 0$ nên điều kiện cần và đủ để (1) có nghiệm là

$(2 - a)^2 + (2a + 1)^2 \geq (3a - 1)^2 \Leftrightarrow 2a^2 - 3a - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq a \leq 2$

✓ *Vấn đề 4:* BÀI TOÁN VỀ TAM GIÁC

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Sử dụng công thức trong tam giác tương ứng
- Nhận dạng tam giác bằng cách rút gọn hệ thức đã cho hay chứng tỏ hệ thức đó là điều kiện dấu bằng của bất đẳng thức

Hệ thức trong tam giác cần chú ý

a. Định lí hàm số sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

b. Định lí hàm số cosin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

c. Định lí đường trung tuyến: $m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$

d. Định lí đường phân giác: $l_a = \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b + c}$

e. Diện tích tam giác:

$S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{abc}{4R} = pr = (p - a).r_a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

f. Bán kính đường tròn nội tiếp: $r = (p - a)\tan\frac{A}{2} = (p - b)\tan\frac{B}{2} = (p - c)\tan\frac{C}{2}$

g. Bán kính đường tròn bàng tiếp: $r_a = p.\tan\frac{A}{2}$

B.ĐỀ THI

Bài 1: ĐỀ DỰ BỊ 1

Tìm các góc A, B, C của tam giác ABC để biểu thức:

$Q = \sin^2A + \sin^2B - \sin^2C$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

Ta có: $Q = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A) + \frac{1}{2}(1 - \cos 2B) - \sin^2C$

$= 1 - \cos(A + B).\cos(A - B) - \sin^2 C = 1 + \cos C \cos(A - B) - 1 + \cos^2C$

$= \cos^2C + \cos C.\cos(A - B)$

$= \left[\cos C + \frac{1}{2}\cos(A - B)\right]^2 - \frac{1}{4}\cos^2(A - B) \geq -\frac{1}{4}$

Vậy $Q_{min} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ \cos C = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 120^0 \\ A = B = 30^0 \end{cases}$

Bài 2: ĐỀ DỰ BỊ 2

Xác định hình dạng của tam giác ABC, biết rằng:

$$(p - a)\sin^2 A + (p - b)\sin^2 B = c.\sin A.\sin B$$

Trong đó BC = a, CA = b, AB = c, $p = \frac{a + b + c}{2}$.

Giải

$(p - a)\sin^2A + (p - b)\sin^2B = c.\sin A.\sin B$

$\Leftrightarrow (p - a)a^2 + (p - b)b^2 = abc$ (định lý hàm sin)

$\Leftrightarrow \frac{(p - a)a}{bc} + \frac{(p - b)b}{ac} = \frac{p(p - a)a}{bc} + \frac{p(p - b)b}{ac} = p$

$\Leftrightarrow a(1 + \cos A) + b(1 + \cos B) = a + b + c$

$\left(\frac{p.(p - a)}{bc} = \frac{p.r}{b.c.\tan\frac{A}{2}} = \frac{abc}{4R}.\frac{1}{b.c.\tan\frac{A}{2}} = \frac{a}{4.R.\tan\frac{A}{2}} = \frac{\sin A}{2.\tan\frac{A}{2}} = \frac{1 + \cos A}{2} \right)$

$\Leftrightarrow a\cos A + b\cos B = c$

$\Leftrightarrow \sin 2A + \sin 2B = 2\sin C$

$\Leftrightarrow 2\sin(A + B).\cos(A - B) = 2\sin C$

$\Leftrightarrow \cos(A - B) = 1 \Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại C.

Bài 3: ĐỀ DỰ BỊ 2

Xét tam giác ABC có độ dài cạnh AB = c, BC = a, CA = b.

Tính diện tích tam giác ABC biết rằng: $b\sin C(b\cos C + c.\cos B) = 20$.

Giải

Tính diện tích tam giác

Từ b.sinC(b.cosC + c.cosB) = 20

$\Leftrightarrow 4R^2\sin B.\sin C(\sin B\cos C + \sin C.\cos B) = 20$

$\Leftrightarrow 4R^2.\sin B.\sin C.\sin A = 20$ (1)

Ta có: $S = \frac{abc}{4R} = \frac{8R^3.\sin A.\sin B.\sin C}{4R} = 2R^2.\sin A.\sin B.\sin C$ (2)

Thế (1) vào (2) $\Rightarrow$ S = 10 (đvdt)

Bài 4:

Gọi x, y, z là khoảng cách từ các điểm M thuộc miền trong của ΔABC có 3 góc nhọn đến các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \le \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}}$$. Dấu "=" xảy ra khi nào?

(a, b, c là các cạnh của ΔABC, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp).

Giải

Ta có: $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R} = a\frac{a}{2R} + b.\frac{b}{2R} + c.\frac{c}{2R}$

$\Rightarrow VP = a\sin A + b\sin B + c\sin C = a\frac{2S}{bc} + b\frac{2S}{ac} + c\frac{2S}{ab} = 2S\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}\right)$

Mặt khác ta có: 2S = ax + by + cz, do đó:

$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R} = (ax + by + cz)\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{c} + \frac{c}{ab}\right)$ (1)

Ta có: $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} = \frac{1}{2a}\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \frac{1}{2b}\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + \frac{1}{2c}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$

Vậy $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ $\left(\text{Vì } \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \ge 2\right)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R} \ge (ax + by + cz)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

$\ge \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{ax} + \frac{1}{\sqrt{b}}\sqrt{by} + \frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{cz}\right)^2 = \left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right)^2$

Suy ra: $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \le \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b}{c}+\frac{c}{b}=\frac{a}{c}+\frac{c}{a}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=2 \\ a\sqrt{x}=b\sqrt{y}=c\sqrt{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ x=y=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta ABC \text{ đều} \\ M:\text{trọng tâm} \end{cases}$

Bài 5:

Gọi A, B, C là 3 góc của tam giác ABC, chứng minh rằng để tam giác ABC đều thì điều kiện cần và đủ là:

$$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}-2=\frac{1}{4}\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}$$

Giải

Ta có: $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}-2=\frac{1}{4}\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}$

$\Leftrightarrow 4\cos^2\frac{A}{2}+4\cos^2\frac{B}{2}+4\cos^2\frac{C}{2}-8=\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}$

$\Leftrightarrow 2+2\cos A+2+2\cos B+2+2\cos C-8=\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}$

$\Leftrightarrow 2(\cos A+\cos B+\cos C-1)=\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}$

$\left(\text{Ta biết } \cos A+\cos B+\cos C-1=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}$

Nhân hai vế cho $8\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$\Leftrightarrow$ 8sinAsinBsinC = (sinA + sinB)(sinB + sinC)(sinC + sinA)

$\Leftrightarrow$ sinA = sinB = sinC (Cauchy có VP $\geq$ VT)

$\Leftrightarrow$ A = B = C $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.